

۱- برای یافتن وارون تابع $y = f(x)$ ابتدا x را بر حسب y محاسبه نموده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.
 $y = 2x + 14 \Rightarrow x = \frac{y - 14}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 7$
 بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۶۷ - شماره: ۱۴۹۵۵

۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع جزء صحیح، می‌دانیم $n \leq x \leq n+1 \Rightarrow [x] = n$ همچنین
 می‌دانیم $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ بنابراین به ازاء $x = -\frac{1}{2}$ برای عبارت داده شده داریم:

$$\left| \left[\frac{-7}{2} \right] - \left[\frac{-5}{2} \right] \right| = |[-3/5] - [-2/5]| = |-4 - |-3|| = |-4 - 3| = 7$$

آزمایشی سنجش - تجربی - ۸۷ - جامع ۲ و دوره دوم متوسطه - آزمایشی سنجش - آزمونهای سال سوم - ۸۷ - جامع ۱ و دوره دوم متوسطه - آزمایشی سنجش - ریاضی - ۸۷ - جامع ۱، شماره: ۱۵۴۸۴

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع یک به یک داریم:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f: y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(m, 3), (-1, 3) \in f \Rightarrow m = -1 \Rightarrow (2m, a) = (-2, a) \in f$$

$$(-2, 2) \in f \Rightarrow a = 2$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع یک به یک، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۷۸ - دوره دوم متوسطه - سراسری نظام قدیم - ریاضی - ۷۸ - مرحله اول، شماره: ۱۳۷۲۸

۴- اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به f باشد حتماً زوج مرتب (b, a) متعلق به معکوس f است یعنی:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده و ضابطه تابع f داریم $f(0) = 1$ ، چون $(0, 1) \in f$ است پس $(1, 0) \in f^{-1}$ می‌باشد با توجه به مطالب فوق گزینه ۳ صحیح است.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۷۲ - شماره: ۱۵۳۷۹

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A \Big|_4^a \in f \Rightarrow 4 = -x + \sqrt{-2x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{قابل قبول} \\ x = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته: این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می‌شود.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۸۸ - شماره: ۳۷۸۵۸۳

۶- شرط بامعنی بودن y آن است که زیر رادیکال مثبت باشد. پس:

$$\frac{1 - |x|}{1 + |x|} \geq 0$$

چون همواره مخرج مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، باید صورت کسر غیر منفی باشد. با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:
 $1 - |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$
 پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، دامنه، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۶۹ - مرحله اول، شماره: ۱۵۰۶۴

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{1, 2, 3\} - \{3\} = \{1, 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{2(1)}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2(2)}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{5}\right), \left(2, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، عملیات روی توابع و ترکیب توابع، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی - ۸۹، شماره: ۲۵۷۴۲۱

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که رادیکال‌ها با فرجه زوج، زمانی معنی دار هستند که عدد زیر رادیکال غیرمنفی باشد پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

$$\frac{x-1}{x-3} \geq 0: \begin{array}{c|c|c|c} x & - & 1 & 3 \\ \hline x-1 & - & + & + \\ x-3 & - & - & + \\ \hline \frac{x-1}{x-3} & + & - & + \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x \leq 1 \\ \text{یا} \\ x > 3 \end{array}$$

$$\frac{2-x}{x} \geq 0: \begin{array}{c|c|c|c} x & - & 2 & \\ \hline 2-x & + & + & - \\ x & - & + & + \\ \hline \frac{2-x}{x} & - & + & - \end{array} \Rightarrow 0 < x \leq 2$$

برای به دست آوردن دامنه تعریف تابع f ، اشتراک دامنه‌های دو عبارت لازم است. در نتیجه $x \in (0, 1]$ حاصل می‌شود.

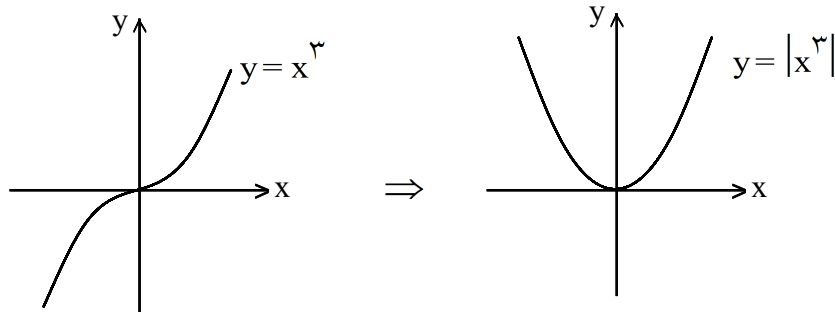
[آزمون یار نگارش دانش آموز]، دامنه، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۷۱، شماره: ۱۵۲۷۴

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن معادله خط نسبت به $y = x$ کافیست جای x و y را عوض کنیم پس داریم:

$$x = 2y + 2 \Rightarrow 2y = x - 2$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - تجربی - ۷۳، شماره: ۱۶۵۲۶

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۵، شماره: ۸۵۵۱۸۳

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 = 1$$

$$-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، عملیات روی توابع و ترکیب توابع، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۹۰، شماره: ۲۸۲۴۷۴

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای یافتن قرینه‌ی هر منحنی نسبت به خط $y = x$ کافی است جای متغیرهای x و y عوض شود. زیرا قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم همان تابع وارون است. پس:

$$-2 = 3x - 2y \Rightarrow 3x - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدا}$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، بدست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون، و دوره دوم متوسطه - سراسری - تجربی - ۹۷، شماره: ۹۷۲۹۹۶

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج، زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین:

$$y = \sqrt{4 - |x - 1|} \Rightarrow 0 \leq 4 - |x - 1| \Rightarrow |x - 1| \leq 4 \quad (|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a) \Rightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

بنابراین دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $[-3, 5]$ است که شامل ۹ عدد صحیح است $(\{-3, -2, \dots, 4, 5\})$.

تذکر: تعداد اعداد صحیح که در رابطه‌ی $a \leq x \leq b$ با شرط $a, b \in \mathbb{Z}$ صدق می‌کند، برابر است با $b - a + 1$.

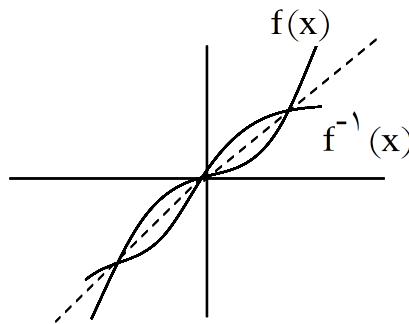
[آزمون یار نگارش دانش آموز]، دامنه، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی - ۸۸، شماره: ۴۸۰۹۲۱

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بازه $[-4, -3]$ ، y مثبت و x منفی است که $xf(x)$ منفی می‌شود و قابل قبول نمی‌باشد. در بازه $[-3, 0]$ ، y منفی و x هم منفی است که $xf(x)$ مثبت می‌شود و قابل قبول است و در بازه $[1, 2]$ هم x و y مثبت هستند که قابل قبول است.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، دامنه، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۹۲ (سراسری - آزاد)، شماره: ۳۰۴۰۱۳

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - تجربی - ۹۵، شماره: ۸۵۵۵۱۱

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر f یک تابع معکوس پذیر باشد و نقطه‌ی (α, β) روی تابع f باشد، یعنی داشته باشیم $f(\alpha) = \beta$ آن گاه $f^{-1}(\beta) = \alpha$ بوده و نقطه‌ی (β, α) بر روی تابع معکوس f قرار دارد. بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = 4^3 + \sqrt{4} = 64 + 2 = 66 \Rightarrow f^{-1}(66) = 4 \Rightarrow (66, 4) \in f^{-1}$$

گزینه‌ی (۱) یعنی نقطه‌ی $(4, 66)$ بر روی خود تابع f قرار دارد، گزینه‌ی (۳) یعنی $(66, 4)$ بر روی معکوس تابع f قرار دارد. به همین ترتیب نقطه‌ی $(1, 2)$ روی تابع f و نقطه‌ی $(2, 1)$ روی تابع f^{-1} می‌باشد.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی - ۸۸، شماره: ۴۸۰۹۲۲

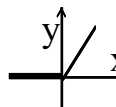
۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = [x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x - f(x))$ یا همان $f(x - [x])$ کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x - [x]$ همواره در فاصله‌ی $(0, 1]$ تغییر می‌کند، پس داریم:

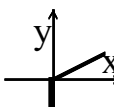
$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = 0$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع جزء صحیح، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی - ۸۵، شماره: ۳۹۱۱۱۳

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف قدرمطلق مسئله را ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x + 2x & x \geq 0 \\ 2x - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع فوق بصورت  می‌باشد. چون معکوس یک تابع، تقارن یافته آن نسبت به نیمساز ربع

اول و سوم یعنی $(y = x)$ است. پس معکوس منحنی نمایش تابع بصورت  می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع معکوس پذیر، و دوره دوم متوسطه - سراسری - ریاضی - ۷۰، شماره: ۱۵۱۷۰

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. $(3, 2) = (b, 2) \Rightarrow b = 3$ اما از میان دو مقدار به‌دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a, b) = (2, 3)$ می‌باشد.

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع یک به یک، و دوره دوم متوسطه - کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی - ۸۶، شماره: ۳۹۰۵۳۳

۲۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^{20} < 1 \Rightarrow [x^{20}] = 0$$

[آزمون یار نگارش دانش آموز]، تابع جزء صحیح، و دوره دوم متوسطه - سراسری - تجربی - ۸۸، شماره: ۳۷۸۶۴۹